石家庄市2019-2020学年第一学期期末考试答案

高二数学答案

一．选择题

1~5 BBADB　6~10 CDDAB　11 ~12 CB

二、填空题

13. -2　14. $\frac{1}{3}$　15. $\frac{24}{7}$　16. $\sqrt{2}+1$

三．解答题

17：解：（Ⅰ）设区间$[75,85]$内的频率为x，

则区间$[55,65)$，$[65,75)$内的频率分别为$4x$和$2x$．……1分

依题意得$(0.004+0.012+0.019+0.030)\times 10+4x+2x+x=1$，……3分

解得$x=0.05$．

所以区间$[75,85]$内的频率为0.05．……4分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，区间$[45,55)$，$[55,65)$，$[65,75)$内的频率依次为0.3，0.2，0.1．

用分层抽样的方法在区间$[45,75)$内抽取一个容量为6的样本，

则在区间$[45,55)$内应抽取$6\times\frac{0.3}{0.3+0.2+0.1}=3$人，记为$A_1$，$A_2$，$A_3$．

在区间$[55,65)$内应抽取$6\times\frac{0.2}{0.3+0.2+0.1}=2$人，记为$B_1$，$B_2$．

在区间$[65,75)$内应抽取$6\times\frac{0.1}{0.3+0.2+0.1}=1$人，记为$C$．……5分

设“从中任意选取2个孩子，这2个孩子跳绳数值都在区间$[45,65)$内”为事件M，

则所有的基本事件有：$\{A_1,A_2\}$，$\{A_1,A_3\}$，$\{A_1,B_1\}$，$\{A_1,B_2\}$，$\{A_1,C\}$，$\{A_2,A_3\}$，

$\{A_2,B_1\}$，$\{A_2,B_2\}$，$\{A_2,C\}$，$\{A_3,B_1\}$，$\{A_3,B_2\}$，$\{A_3,C\}$，$\{B_1,B_2\}$，$\{B_1,C\}$，$\{B_2,C\}$，

共 15 种. ……7 分

事件 M 包含的基本事件有：$\{A_1,A_2\}$，$\{A_1,A_3\}$，$\{A_1,B_1\}$，$\{A_1,B_2\}$，$\{A_2,A_3\}$，

$\{A_2,B_1\}$，$\{A_2,B_2\}$，$\{A_3,B_1\}$，$\{A_3,B_2\}$，$\{B_1,B_2\}$，共 10 种. ……9 分

所以这 2 个孩子跳绳数值都在区间 $[45,65)$ 内的概率为 $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$. ……10 分

18 解：（1）圆 C 的方程 $x^2+y^2-8y+12=0$. ……4 分

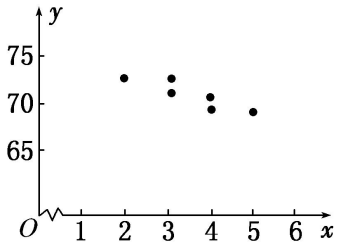
(2)过圆心 C 作 $CD\perp AB$，则根据题意和圆的性质，

得 $\begin{cases}|CD|=\dfrac{|4+2a|}{\sqrt{a^2+1}},\\ |CD|^2+|DA|^2=|AC|^2=2^2,\\ |DA|=\dfrac{1}{2}|AB|=\sqrt{2},\end{cases}$ ……6 分

解得 $a=-7$ 或 $a=-1$. ……10 分

故所求直线方程为 $7x-y+14=0$ 或 $x-y+2=0$. ……12 分

19 解：(1)设 x 表示每月产量(单位：千件)，y 表示单位成本(单位：元/件)，作散点图. 由图知 y 与 x 间呈线性相关关系，（不画图不扣分）



设线性回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$.，其中 $\bar{x}=3.5$ ……1 分

$\bar{y}=71$ ……1 分

由公式可求得 $\hat{b}\approx-1.818$， ……4 分

$\hat{a}\approx77.363$， ……6 分

∴回归方程为 $\hat{y}=-1.818x+77.363$. ……8 分

(2)由回归方程知，每增加 1 000 件产量，单位成本下降 1.818 元. ……10 分

(3)当 $\hat{y}=70$ 时，$70=-1.818x+77.363$，

得 $x\approx4.050$ 千件.

∴单位成本是 70 元/件时，产量约为 4 050 件. ……12 分

备注：若学生计算时用分数，答案可见下面

情况一：设线性回归方程为$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$.，其中$\bar{x}=3.5$ ……1 分

$\bar{y}=71$ ……1 分

由公式可求得$\hat{b}=-\frac{10}{5.5}$ ……4 分

$\hat{a}=77.364$，……6 分

∴回归方程为$\hat{y}=-\frac{10}{5.5}x+77.364$.……8 分

(2)由回归方程知，每增加 1 000 件产量，单位成本下降 1.818 元．……10 分

(3)当$\hat{y}=70$时，$70=-\frac{10}{5.5}x+77.364$，得 $x\approx4.051$ 千件．

∴单位成本是 70 元/件时，产量约为 4 051 件. ……12 分

情况二：设线性回归方程为$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$.，其中$\bar{x}=3.5$ ……1 分

$\bar{y}=71$ ……1 分

由公式可求得$\hat{b}=-\frac{10}{5.5}=-\frac{20}{11}$ ……4 分

$\hat{a}=\frac{851}{11}=77\frac{4}{11}$，……6 分

∴回归方程为$\hat{y}=-\frac{20}{11}x+\frac{851}{11}$ ……8 分

(2)由回归方程知，每增加 1 000 件产量，单位成本下降$\frac{20}{11}$元．……10 分

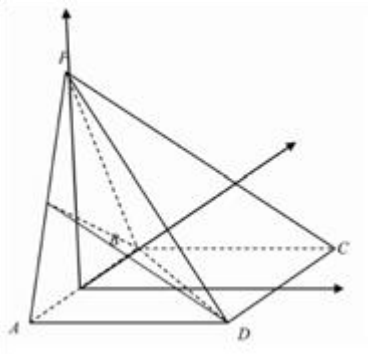
(3)当$\hat{y}=70$时，$70=-\frac{20}{11}x+\frac{851}{11}$，得 x=4.05 千件．

∴单位成本是 70 元/件时，产量约为 4 050 件. ……12 分

20. 解：（1）证法一：设 AB 中点为 O，连接 PO，

由已知 $PA=PB$，所以 $PO\perp AB$，而平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，交线为 AB

故 $PO\perp$ 平面 $ABCD$ …… 2 分



以O为原点，OP为z轴，OB为y轴，如图建立空间直角坐标系，并设$PO=h$，

则$P(0,0,h),B(0,1,0),C(\sqrt{2},1,0),D(\sqrt{2},-1,0)$

所以$\overrightarrow{PC}=(\sqrt{2},1,-h),\overrightarrow{BD}=(\sqrt{2},-2,0)$

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，所以$PC\perp BD$. ····· 4分

证法二：设AB中点为O，连接PO，由已知$PA=PB$，所以$PO\perp AB$，

而平面$PAB\perp$平面$ABCD$，交线为AB

故$PO\perp$平面$ABCD$，

从而$BD\perp PO$ ① ·····2分

在矩形$ABCD$中，连接CO，设CO与BD交于M，

则由$CD:CB=BC:BO$知$\Delta BCD\sim\Delta OBC$，所以$\angle BCO=\angle CDB$

所以$\angle BCM+\angle CBM=\angle CDB+\angle CBM=90°$，故$BD\perp CO$ ②

由①②知$BD\perp$平面PCO

所以$PC\perp BD$. ····· 4分

（2）由$AD\perp AB$，平面$PAB\perp$平面$ABCD$，交线为AB，可得$AD\perp$平面PAB，

所以平面$PAB\perp$平面PAD，交线为PA

过B作$BH\perp PA$，垂足为H，则$BH\perp$平面PAD

BD与平面PAD所成的角即为角$\angle BDH$

所以 $BH=\frac{\sqrt{2}}{2}BD=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{3}$

从而三角形 PAB 为等边三角形，$PO=\sqrt{3}$ ····· 6 分

（也可以用向量法求出 PO，设 $P(0,0,h)$，则 $A(0,-1,0),B(0,1,0),D(\sqrt{2},-1,0)$，可求得平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{p}=(0,h,-1)$，而 $\overrightarrow{BD}=(\sqrt{2},-2,0)$，

由 $\cos\langle\vec{p},\overrightarrow{BD}\rangle=\sin 45°$ 可解得 $h=\sqrt{3}$）

设平面 BPC 的一个法向量为 $\vec{m}$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，

$\overrightarrow{BP}=(0,-1,\sqrt{3}),\overrightarrow{BC}=(\sqrt{2},0,0)$，可取 $\vec{m}=(0,\sqrt{3},1)$ ····· 8 分

设平面 DPC 的一个法向量为 $\vec{n}$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$，

$\overrightarrow{DP}=(-\sqrt{2},1,\sqrt{3}),\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，可取 $\vec{n}=(-\sqrt{3},0,-\sqrt{2})$ ····· 10 分

于是 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，

故二面角 $B-PC-D$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. ····· 12 分

21.解（1）由题意得：$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，设直线 MN 方程为：$y=x-\frac{p}{2}$

代入抛物线方程得：$x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$ ····· 2 分

设 $M(x_M,y_M)$，$N(x_N,y_N)$ $\therefore x_M+x_N=3p$

$\therefore|MN|=x_M+x_N+p=4p=2$，解得：$p=\frac{1}{2}$···

$\therefore$ 抛物线方程为：$y^2=x$ ····· 4 分

（2）由（1）知：抛物线$C:y^2=x$　$\therefore Q(1,1)$

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

由$\begin{cases}y=kx+m\\y^2=x\end{cases}$得：$ky^2-y+m=0$，则$\Delta=1-4km>0$

$\because k\neq 0$　$\therefore y_1+y_2=\frac{1}{k}$，$y_1y_2=\frac{m}{k}$　…… 6分

$\therefore k_1k_2=\frac{y_1-1}{x_1-1}\cdot\frac{y_2-1}{x_2-1}=\frac{y_1-1}{y_1^2-1}\cdot\frac{y_2-1}{y_2^2-1}=\frac{1}{(y_1+1)(y_2+1)}=-\frac{1}{2}$ ……8分

即：$y_1y_2+(y_1+y_2)+3=0$　$\therefore\frac{m}{k}+\frac{1}{k}+3=0$，解得：$m=-3k-1$

当$m=-3k-1$时，$1-4km=1+4k(3k+1)=12k^2+4k+1>0$ ……10分

$\therefore y=kx-3k-1=k(x-3)-1$，恒过定点$(3,-1)$

$\therefore$直线l恒过定点$(3,-1)$　……12分

22.解：(1)当$a=0$时，$f(x)=e^x(\sin x-e)$，$x\in R$

$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x-e)=e^x[\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})-e]$，

$\because$当$x\in R$时，$\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\leq\sqrt{2}$，$\therefore f'(x)<0$，$\therefore f(x)$在**R**是单调递减的函数．…… 4分

(2)设$g(x)=\sin x-ax^2+2a-e$，$x\in[0,+\infty)$

要证$f(x)<0$,即证$g(x)<0$

$g'(x)=\cos x-2ax$，令$h(x)=g'(x)=\cos x-2ax$，$x\in[0,+\infty)$

则$h'(x)=-\sin x-2a$

当$\frac{1}{2}\leq a\leq 1$时，$x\in[0,+\infty)$，有$h'(x)\leq 0$，$\therefore h(x)$在$[0,+\infty)$上是减函数，

即$g'(x)$在$[0,+\infty)$上是减函数．　…… 6分

又∵ $g'(0)=1>0$， $g'(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}-a\pi}{2}\le\frac{\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}}{2}<0$， ∴ $g'(x)$ 存在唯一的 $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$，使得

$g'(x_0)=\cos x_0-2ax_0=0$， 所以当 $x_0\in(0,x_0)$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 单调递增；

当 $x_0\in(x_0,+\infty)$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 单调递减.因此在区间 $[0,+\infty)$

$g(x)_{\max}=g(x_0)=\sin x_0-ax_0^2+2a-e$ …… 8 分

因为 $\cos x_0-2ax_0=0$，所以 $x_0=\frac{1}{2a}\cos x_0$，将其代入上式得

$g(x)_{\max}=\sin x_0-\frac{1}{4a}\cos^2 x_0+2a-e=\frac{1}{4a}\sin^2 x_0+\sin x_0-\frac{1}{4a}+2a-e$

令 $t=\sin x_0, x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$，则 $t\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，即有 $p(t)=\frac{1}{4a}t^2+t-\frac{1}{4a}+2a-e, t\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$

因为 $p(t)$ 的对称轴 $t=-2a<0$，所以函数 $p(t)$ 在区间 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 上是增函数，且 $\frac{1}{2}\le a\le 1$

所以 $p(t)<p(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{8a}+2a-e<\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{15}{8}-e<0$， （$\frac{1}{2}\le a\le 1$），即任意 $x\in[0,+\infty)$， $g(x)<0$，

所以 $f(x)=e^x g(x)<0$，因此任意 $x\in[0,+\infty)$， $f(x)<0$ …… 12 分

法二：要证$f(x)<0$，可转化为证明$\sin x-ax^2+2a-e<0$，即$(2-x^2)a+\sin x-e<0$，

…… 6 分

令$g(a)=(2-x^2)a+\sin x-e, a\in[\frac{1}{2},1)$，即证$g(a)_{\max}<0.$

即证$\begin{cases}\frac{1}{2}(2-x^2)+\sin x-e<0,\ (1)\\ (2-x^2)+\sin x-e<0,\ \ (2)\end{cases}$恒成立。

即证$\begin{cases}1+\sin x-\frac{1}{2}x^2-e<0,\ (1)\\ 2+\sin x-x^2-e<0,\ \ (2)\end{cases}$ …… 8 分

对任意的 $x\in[0,+\infty)$，$1+\sin x\le 2$，易得（1）恒成立； ……10 分

在（2）中令 $h(x)=2+\sin x-x^2-e$，

$x \geq 0$时，易证$\sin x \leq x$，所以$h(x) \leq 2 + x - x^2 - e = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4} - e < 0$

∴（2）恒成立。 …… 12分

其中$\sin x \leq x$的证明不做要求，不占分值。